

## RAINBOW ANTIMAGIC COLORING PADA GRAF HASIL OPERASI COMB GRAF LINTASAN

Brian Juned Septory<sup>1\*</sup>, Dwi Agustin Retnowardani<sup>2</sup>, Laeliyatul Hasanah<sup>3</sup>, Dliou Kamal<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universitas Nusa Cendana, [brian\\_septory@staf.undana.ac.id](mailto:brian_septory@staf.undana.ac.id)

<sup>2</sup>Program Studi Statistik, Universitas PGRI Argopuro Jember, [2i.agustin@gmail.com](mailto:2i.agustin@gmail.com)

<sup>3</sup>Program Studi Statistik, Universitas PGRI Argopuro Jember, [laeliyatul.hasanah@gmail.com](mailto:laeliyatul.hasanah@gmail.com)

<sup>4</sup>National School of Applied Science, Universitas Ibn Zohr, [dlioukamal@gmail.com](mailto:dlioukamal@gmail.com)

\* [brian\\_septory@staf.undana.ac.id](mailto:brian_septory@staf.undana.ac.id)

**Abstrak.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Misalkan fungsi  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  adalah fungsi bijektif. Bobot sisi dari graf  $G$  didefinisikan sebagai  $w(uv) = f(u) + f(v)$ . Jika terdapat lintasan  $u - v$  dengan setiap dua sisi  $xy, x'y' \in (G)$  pada lintasan  $u - v$  mempunyai bobot yang berbeda yaitu,  $w(xy) \neq w(x'y')$  maka fungsi bijektif  $f$  disebut rainbow antimagic labeling. Dengan demikian jika dipandang bobot sisi  $w(xy)$  sebagai pewarnaan sisi  $uv$ , maka  $f$  juga disebut rainbow antimagic coloring. Rainbow antimagic connection number adalah jumlah warna paling kecil dari semua rainbow antimagic coloring pada graf  $G$ , dinotasikan dengan  $rac(G)$ . Pada makalah ini, dipelajari tentang rainbow antimagic coloring dan diperoleh nilai dari rainbow antimagic connection number pada graf hasil operasi comb pada graf lintasan  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ .

**Kata kunci:** pelabelan *antimagic*, graf lintasan, pewarnaan pelangi.

**Abstract.** Let  $G$  be a connected graph with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . Let the function  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  be a bijective function. The edge weight of the graph  $G$  is defined as  $w(uv) = f(u) + f(v)$ . If there is a path  $u - v$  with each two edges  $xy, x'y' \in (G)$  on the path  $u - v$  having different weights, i.e.,  $w(xy) \neq w(x'y')$  then the bijective function  $f$  is called rainbow antimagic labeling. Thus, if the edge weight  $w(xy)$  is viewed as the coloring of the edge  $uv$ , then  $f$  is also called rainbow antimagic coloring. Rainbow antimagic connection number is the smallest number of colors of all rainbow antimagic colorings on graph  $G$ , denoted by  $rac(G)$ . In this paper, we study rainbow antimagic coloring and obtain the value of rainbow antimagic connection number on the comb product of path graphs  $P_7 \triangleright P_4$  and  $P_7 \triangleright P_6$ .

**Keywords:** *antimagic labeling, path graph, rainbow coloring.*

DITERIMA: 16 Juni 2024

DISETUJUI: 28 Juni 2024

ONLINE: 30 Juni 2024

### 1. PENDAHULUAN

Definisi graf dalam makalah ini menggunakan definisi yang terdapat pada Chartrand and Zang [7]. Teori graf memiliki berbagai macam kajian utama diantaranya ada pewarnaan pada graf dan pelabelan pada graf. Pewarnaan graf dapat diaplikasikan pada berbagai bidang, segmentasi gambar, pengelompokan, penangkapan gambar, dan

jaringan. Chartrand, dkk. [8] memperluas konsep pewarnaan graf menjadi bidang kajian baru yaitu rainbow coloring.

Misalkan  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$  adalah pewarnaan sisi dari graf terhubung dengan dua sisi yang bertetangga mungkin memiliki warna yang sama. Jika untuk setiap dua titik  $x, y \in V(G)$ , terdapat lintasan pelangi  $x - y$ , jika tidak ada dua sisi dari lintasan  $x - y$  yang berwarna sama, maka lintasan tersebut disebut lintasan pelangi. Pewarnaan graf  $G$  disebut rainbow connection, jika untuk setiap dua titik  $x, y \in V(G)$  terdapat lintasan pelangi  $x - y$ . Pewarnaan sisi pada graf  $G$  dengan setiap dua titik berbeda memiliki rainbow connection disebut pewarnaan pelangi, definisi pewarnaan pelangi dapat dilihat juga pada Chartrand, dkk [8].

Hasil dari kajian rainbow coloring dapat dilihat pada Ma, dkk [15] dan Nabila, dkk [17]. Berdasarkan kajian rainbow coloring terdapat kajian sebagai hasil pengembangan dari rainbow coloring yaitu, rainbow vertex coloring dan total rainbow coloring. Hasil dari rainbow vertex coloring dapat dilihat pada Lie. H, dkk [13] dan Bustan, dkk [6], kemudian untuk hasil dari kajian total rainbow coloring dapat dilihat pada Ma. Y dkk [16] dan Lie. H [14].

Kajian rainbow coloring merupakan salah satu kajian dari pewarnaan pada graf, selain itu terdapat juga kajian dalam teori graf yaitu antimagic labeling yang didefinisikan oleh Hartsfield and Ringel [11]. Hasil dari antimagic labeling telah ditemukan oleh peneliti-peneliti diantaranya ada Baca dkk pada [3], [4], [5]. Selain itu, beberapa hasil penelitian tentang antimagic labeling telah disumbangkan oleh Dafik, dkk dalam [10] dan juga dapat ditemukan dalam beberapa makalah yaitu pada [1] dan [18].

Arumugam, dkk. [2], mendefinisikan konsep baru dengan menggabungkan pewarnaan graf dan pelabelan graf. Fungsi bijektif  $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ , bobot titik dari titik  $x$  adalah  $w(x) = \sum_{xy \in E(x)} f(xy)$  dan  $E(x)$  adalah himpunan sisi yang terkait dengan  $x$  untuk setiap  $x \in V(G)$ . Jika untuk setiap dua titik yang bertetangga  $x, y \in V(G), w(x) \neq w(y)$ , maka fungsi bijektif  $f$  disebut local antimagic labeling. Jadi, setiap local antimagic label adalah pewarnaan titik di  $G$  dengan simpul  $x$  diwarnai dengan  $w(x)$ . Berdasarkan definisi Arumugam, dkk [2], pada tahun Dafik, dkk [9] mendefinisikan kombinasi dari kaian antimagic labeling dan rainbow coloring menjadi kaian baru yang disebut rainbow antimagic coloring.

Kajian dalam makalah ini adalah kombinasi dari rainbow coloring dan antimagic labeling yaitu rainbow antimagic coloring yang didefinisikan oleh Dafik, dkk. [9]. Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dan fungsi  $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  adalah fungsi bijektif. Bobot sisi dari graf  $G$  didefinisikan sebagai  $w(uv) = f(u) + f(v)$ . Jika terdapat lintasan  $u - v$  dengan setiap dua sisi  $xy, x'y' \in (G)$  pada lintasan  $u - v$  mempunyai bobot yang berbeda yaitu,  $w(xy) \neq w(x'y')$  maka fungsi bijektif  $f$  disebut rainbow antimagic labeling. Dengan demikian jika dipandang bobot sisi  $w(xy)$  sebagai pewarnaan sisi  $uv$ , maka  $f$  juga disebut rainbow antimagic coloring.

Rainbow antimagic connection number adalah jumlah warna paling kecil dari semua rainbow antimagic coloring pada graf  $G$ . Batas bawah yang digunakan dalam makalah ini sudah ditemukan pada tahun 2021 oleh Dafik, dkk [9].

**Lema 1.** [9] Untuk setiap graf tree  $T_n$  dengan  $n \geq 2$ ,  $rac(T_n) = n - 1$ .

Penelitian lain yang juga meneliti terkait rainbow antimagic coloring dapat dilihat pada [12], [19], [20] and [21]. Pada makalah ini, graf yang digunakan adalah graf hasil operasi comb dari graf lintasan yaitu  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ .

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan teorema-teorema dari hasil penelitian pada kajian rainbow antimagic coloring pada graf hasil operasi comb graf lintasan. Adapun graf yang digunakan dalam penelitian adalah graf  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ . Strategi yang kami laksanakan dalam penelitian ini adalah menggunakan lemma umum dari nilai rainbow antimagic connection number pada graf tree yang diperumum kemudian menggunakan lemma tersebut untuk mencari hasil teorema dari graf hasil operasi comb graf lintasan  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ .

Berdasarkan **Lema 1.**, diperoleh nilai rainbow antimagic connection number pada graf hasil operasi comb  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ .

**Teorema 1.** Untuk graf  $P_7 \triangleright P_4$  dengan  $P_7$  adalah graf lintasan dengan order 7 dan  $P_4$  adalah graf lintasan dengan order 4 dan titik cangkok adalah titik dengan derajat 1, maka  $rac(P_7 \triangleright P_4) = 27$ .

**Bukti.** Misalkan  $P_7$  adalah graf lintasan dengan himpunan titik  $V(P_7) = \{x_i, 1 \leq i \leq 7\}$  dan himpunan sisi  $E(P_7) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 6\}$ . Misalkan  $P_4$  adalah graf lintasan dengan himpunan titik  $V(P_4) = \{x_i, 1 \leq i \leq 4\}$  dan himpunan sisi  $E(P_4) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 3\}$ . Graf hasil operasi comb dari graf  $P_7$  dan  $P_4$  dinotasikan dengan  $P_7 \triangleright P_4$ , berdasarkan Definisi mengenai operasi comb, maka diperoleh graf  $P_7 \triangleright P_4$  dengan himpunan titik  $V(P_7 \triangleright P_4) = \{x_i, 1 \leq i \leq 7\} \cup \{x_{ij}, 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 3\}$  dan himpunan sisi  $E(P_7 \triangleright P_4) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_i x_{i1}, 1 \leq i \leq 7\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1}, 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 2\}$ . Sehingga diperoleh banyaknya titik pada graf  $P_7 \triangleright P_4$  adalah  $|V(P_7 \triangleright P_4)| = 28$  dan banyaknya sisi pada graf  $P_7 \triangleright P_4$  adalah  $|E(P_7 \triangleright P_4)| = 27$ .

Berdasarkan **Lema 1.**  $rac(T_n) = n - 1$ , karena graf  $P_7 \triangleright P_4$  merupakan graf tree dan berdasarkan definisi graf  $P_7 \triangleright P_4$  diperoleh banyaknya sisi adalah  $|E(P_7 \triangleright P_4)| = 27$ . Oleh karena itu, diperoleh batas bawah dari nilai rainbow antimagic connection number graf  $P_7 \triangleright P_4$  adalah  $rac(P_7 \triangleright P_4) \geq 27$ .

Misalkan konstruksi label titik dengan fungsi bijektif  $f: V(P_7 \triangleright P_4) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 28\}$  didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x_i) = \begin{cases} 4 & , \text{ untuk } i = 1 \\ 4i - 3 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 4 - j & , \text{ untuk } i = 1, 1 \leq j \leq 3 \\ 4i - 2 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7, j = 1 \\ 4i - 1 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7, j = 2 \\ 4i & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7, j = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi label titik  $f$ , diperoleh fungsi bobot sisi sebagai berikut :

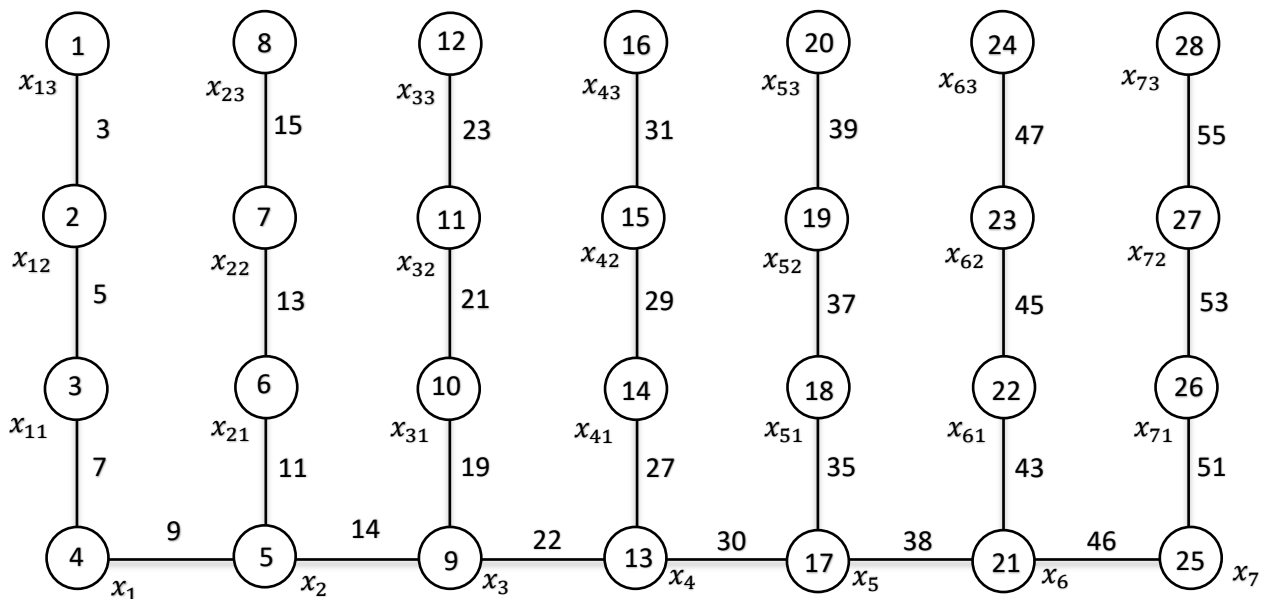
$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 9 & , \text{ untuk } i = 1 \\ 8i - 2 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 7 & , \text{ untuk } i = 1 \\ 8i - 5 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

$$w(x_{ij} x_{ij+1}) = \begin{cases} 5 & , \text{ untuk } i = 1, j = 1 \\ 3 & , \text{ untuk } i = 2, j = 2 \\ 8i - 3 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7, j = 2 \\ 8i - 1 & , \text{ untuk } 2 \leq i \leq 7, j = 2 \end{cases}$$

Berdasarkan **Lema 1**. Diperoleh bahwa nilai rainbow antimagic connection number  $rac(P_7 \triangleright P_4) = 27$ . Karena  $|E(P_7 \triangleright P_4)| = 27$ , sehingga setiap sisi pada graf memiliki bobot yang berbeda. Oleh karena itu, diperoleh batas atas dari nilai rainbow antimagic connection number  $rac(P_7 \triangleright P_4) \geq 27$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas nilai rainbow antimagic connection number, diperoleh  $rac(P_7 \triangleright P_4) = 27$ . Berdasarkan **Lema 1**. Diketahui bahwa nilai rainbow antimagic connection number adalah banyaknya sisi pada graf tree, karena graf  $P_7 \triangleright P_4$  merupakan graf tree, setiap sisi pada graf  $P_7 \triangleright P_4$  memiliki warna berbeda. Oleh karena itu terdapat lintasan pelangi  $x - y$  untuk setiap dua titik  $x, y \in V(P_7 \triangleright P_4)$ .

Rainbow antimagic coloring pada graf  $P_7 \triangleright P_4$  dapat dilihat pada **Gambar 1**.



**Gambar 1.** Rainbow antimagic coloring pada graf  $P_7 \triangleright P_4$

**Teorema 2.** Untuk graf  $P_7 \triangleright P_6$  dengan  $P_7$  adalah graf lintasan dengan order 7 dan  $P_6$  adalah graf lintasan dengan order 6 dan titik cangkok adalah titik dengan derajat 1, maka  $rac(P_7 \triangleright P_6) = 41$ .

**Bukti.** Misalkan  $P_7$  adalah graf lintasan dengan himpunan titik  $V(P_7) = \{x_i, 1 \leq i \leq 7\}$  dan himpunan sisi  $E(P_7) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 6\}$ . Misalkan  $P_6$  adalah graf lintasan dengan himpunan titik  $V(P_6) = \{x_i, 1 \leq i \leq 6\}$  dan himpunan sisi  $E(P_6) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 5\}$ . Graf hasil operasi comb dari graf  $P_7$  dan  $P_6$  dinotasikan dengan  $P_7 \triangleright P_6$ , berdasarkan Definisi mengenai operasi comb, maka diperoleh graf  $P_7 \triangleright P_6$  dengan himpunan titik  $V(P_7 \triangleright P_6) = \{x_i, 1 \leq i \leq 7\} \cup \{x_{ij}, 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 5\}$  dan himpunan sisi  $E(P_7 \triangleright P_6) = \{x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_i x_{i1}, 1 \leq i \leq 7\} \cup \{x_{ij} x_{ij+1}, 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 4\}$ . Sehingga diperoleh banyaknya titik pada graf  $P_7 \triangleright P_6$  adalah  $|V(P_7 \triangleright P_6)| = 42$  dan banyaknya sisi pada graf  $P_7 \triangleright P_6$  adalah  $|E(P_7 \triangleright P_6)| = 41$ .

Berdasarkan **Lema 1**.  $rac(T_n) = n - 1$ , karena graf  $P_7 \triangleright P_6$  merupakan graf tree dan berdasarkan definisi graf  $P_7 \triangleright P_6$  diperoleh banyaknya sisi adalah  $|E(P_7 \triangleright P_6)| = 41$ . Oleh karena itu, diperoleh batas bawah dari nilai rainbow antimagic connection number graf  $P_7 \triangleright P_6$  adalah  $rac(P_7 \triangleright P_6) \geq 41$ .

Misalkan konstruksi label titik dengan fungsi bijektif  $f: V(P_7 \triangleright P_6) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 42\}$  didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x_i) = 6i - 5 \quad , \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 7$$

$$f(x_{ij}) = 6i + j - 5 \quad , \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq 5$$

Berdasarkan fungsi label titik  $f$ , diperoleh fungsi bobot sisi sebagai berikut :

$$w(x_i x_{i+1}) = 12i - 4 \quad , \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 6$$

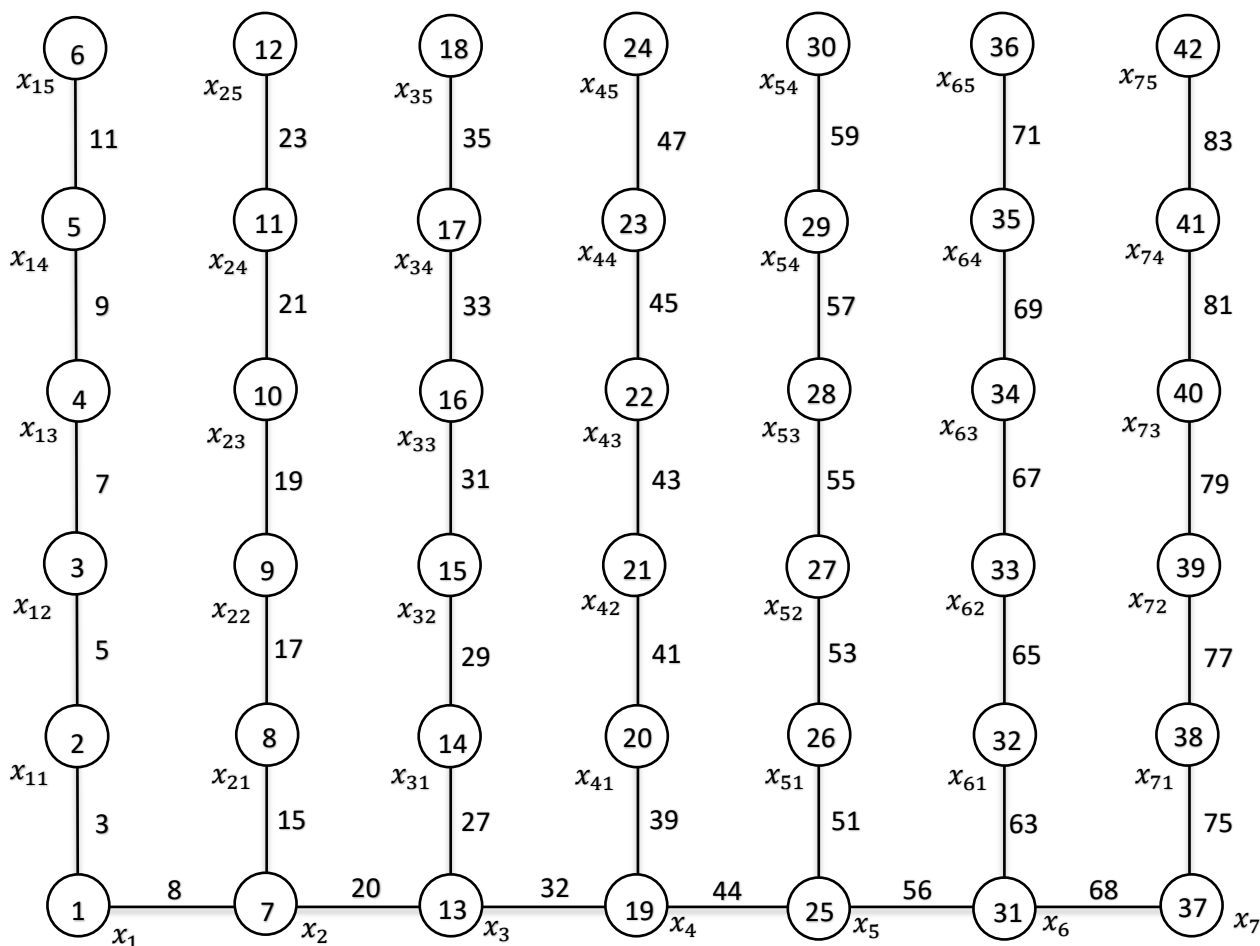
$$w(x_i x_{i1}) = 12i - 9 \quad , \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 7$$

$$w(x_{ij} x_{ij+1}) = 12i + 2j - 9 \quad , \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq 4$$

Berdasarkan **Lema 1**. Diperoleh bahwa nilai rainbow antimagic connection number  $rac(P_7 \triangleright P_6) = 41$ . Karena  $|E(P_7 \triangleright P_6)| = 41$ , sehingga setiap sisi pada graf  $P_7 \triangleright P_6$  memiliki bobot yang berbeda. Oleh karena itu, diperoleh batas atas dari nilai rainbow antimagic connection number  $rac(P_7 \triangleright P_6) \geq 41$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas nilai rainbow antimagic connection number, diperoleh  $rac(P_7 \triangleright P_6) = 41$ .

Berdasarkan **Lema 1**. Diketahui bahwa nilai rainbow antimagic connection number adalah banyaknya sisi pada graf tree, karena graf  $P_7 \triangleright P_6$  merupakan graf tree, maka setiap sisi pada graf  $P_7 \triangleright P_6$  memiliki warna berbeda. Oleh karena itu, terdapat lintasan pelangi  $x - y$  untuk setiap dua titik  $x, y \in V(P_7 \triangleright P_6)$ .

Rainbow antimagic coloring pada graf  $P_7 \triangleright P_6$  dapat dilihat pada **Gambar 2**.



**Gambar 2.** Rainbow antimagic coloring pada graf  $P_7 \triangleright P_6$

### 3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam makalah ini, peneliti telah menemukan hasil dari rainbow antimagic connection number dari beberapa graf. Adapun graf yang telah ditentukan nilai rainbow antimagic connection numbernya adalah graf hasil operasi comb dari graf lintasan  $P_7 \triangleright P_4$  dan  $P_7 \triangleright P_6$ .

Berdasarkan hasil dari makalah ini, diperoleh masalah terbuka yaitu berpakah nilai rainbow antimagic connection number dari graf hasil operasi comb dari graf khusus lainnya.

## REFERENSI

- [1] Arumugam S, Miller M, Phanalasy O, Ryan J, (2014), Antimagic labeling of generalized pyramid graphs, *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 30 (2), 283–290.
- [2] Arumugam S, Premalatha K, Bařca M, Semaniřcov’a-Feřnovř’ıkov’a A, (2017), Local antimagic vertex coloring of a graph, *Graphs Combin.* 33, 275-285.
- [3] Bařca M, (2000), Antimagic labelings of antiprisms, *Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*. 35, 217-224.
- [4] Bařca M, Baskoro E T, Jendrol S, Miler M, (2004), Antimagic labelings of hexagonal plane maps, *Utilitas mathematica*. 66, 231-238.
- [5] Bařca M, Phanalasy O, Ryan J, Semanicov’a-Fenoř’ıkov’a A, (2015), Antimagic labelings of joint graphs, *Mathematics in Computer Science*. 9 (2), 139–143.
- [6] Bustan A W, Salman A N M, (2019), The rainbow vertex connection number of star wheel graphs, *AIP Conference Proceedings*. 112–116.
- [7] Chartrand G, Lesniak L, Zhang P, (2016). *Graphs & Digraphs*, sixth ed., Taylor & Francis Group, New York, 1
- [8] Chartrand G, Johns G L, Mckee K A, Zhang P, (2008), Rainbow connection in graphs, *Math. Bohemica* 133, 85-98.
- [9] Dafik, Susanto F, Alfarisi R, Septory B J, Agustin I H, Venkatachalam M, (2021), On rainbow antimagic coloring of graphs. *Advanced Mathematical Models and Application*. 6 (3) 278-291.
- [10] Dafik, Miler M, Ryan J, Bařca M, (2018), Antimagic labeling of the union of two stars, *Australasian Journal of combinatorics*. 42, 35-44.
- [11] Hartsfield N, Ringel G, 1990 , *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, San Diego.
- [12] Joedo J C, Dafik, Kristiana A I, Agustin I H, Nisviasari R, (2022), On the rainbow antimagic coloring of vertex amalgamation of graphs, *Journal of Physics: Conf. Series* 2157, 012014.
- [13] Lei H, Li S, Liu H, Shi Y, (2018), Rainbow vertex connection of digraphs, *Journal of Combinatorial Optimization*. 35 (1) 86–107.
- [14] Lei H, Liu H, Magnant C, Shi Y, (2018), Total rainbow connection of digraphs, *Discrete Applied Mathematics*. 236, 288–305.

- [15] Ma Y, Lu Z, Rainbow connection numbers of Cayley graphs, (2017), *Journal of Combinatorial Optimization*, 34 (1) 182–193.
- [16] Ma Y, Nie K, Jin F, Wang C, (2019), Total rainbow connection numbers of some special graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 360, 213–220.
- [17] Nabila S, Salman A N M, (2015), The Rainbow Connection Number of Origami Graphs and Pizza Graphs, *Procedia Computer Science*, 74 (1) 162–167.
- [18] Ryan J, Phanalasy O, Miller M, Rylands L, (2011), On antimagic labeling for generalized web and flower graphs, *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6460 LNCS, 303–313.
- [19] Septory B J, Utoyo M I, Dafik, Sulistiyono B, Agustin I H, (2021), On rainbow antimagic coloring of special graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. 1836 012016.
- [20] Septory B J, Susilowati L, Dafik, Lokesha V, (2023), On the study of rainbow antimagic connection number of comb product of friendship graph and tree, *Symetry*, 15, (12)
- [21] Sulistiyono B, Slammin, Dafik, Agustin I H, Alfarisi R, (2020), On rainbow antimagic coloring of some graphs, *Journal of Physics: Conference Series*. 1465 (1)