

BILANGAN DOMINASI TOTAL PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA SISI DARI GRAF LINTASAN DAN SEBARANG GRAF

Dwi Agustin Retnowardani^{*1}, Kamal Dliou², Audia Dwi Retno Wulandari³

^{1,3}Universitas PGRI Argopuro Jember, 2i.agustin@gmail.com

²Universitas Ibn Zohr, dlioukamal@gmail.com

*Penulis Koresponden

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung dan tidak memiliki arah. Himpunan S dari titik-titik di graf G adalah himpunan dominasi dari G jika setiap titik di G terdominasi oleh paling sedikit satu titik S . Kardinalitas minimal dari himpunan dominasi di G disebut bilangan dominasi G dan disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Untuk suatu graf terhubung G , suatu himpunan S^t dari titik-titik di G adalah himpunan dominasi total dari G jika setiap titik di G terhubung langsung ke suatu titik di S^t . Anggota himpunan dominasi total harus terhubung langsung dengan titik lain di S^t . Kardinalitas minimal dari himpunan dominasi total di G disebut bilangan dominasi total dan disimbolkan dengan $\gamma_t(G)$. Operasi korona sisi dari dua graf yang dinotasikan dengan $G \diamond H$ dari graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu buah duplikat dari graf G dan duplikat H sebanyak sisi pada graf G , dan kemudian menghubungkan dua titik ujung dari sisi ke- i pada G dengan setiap titik duplikat ke- i pada H .

Kata kunci: Bilangan dominasi, bilangan dominasi total, himpunan dominasi, himpunan dominasi total, graf hasil operasi korona sisi.

Abstract. Let G be a connected graph and undirected graph. A set S of vertices in a graph G is a dominating set of G if every vertex in G is dominated by at least one vertex of S . The minimum cardinality of a dominating set in G is called the domination number of G and is denoted by $\gamma(G)$. For a connected graph G , a set S^t of vertices in G is the total dominating set of G if every vertex in G is directly connected to a vertex in S^t . Members of the total dominating set must be directly connected to other vertices in S^t . The minimum cardinality of the total dominating set in G is called the total domination number and is denoted by $\gamma_t(G)$. The edge corona product of two graphs denoted by $G \diamond H$ from graphs G and H is defined as the graph obtained by taking one duplicate of graph G and as many duplicates of H as there are edges in graph G , and then connecting the two end vertices of the i -th edge on G with every i -th duplicate vertex on H .

Keywords: Domination number, total domination number, dominating set, total dominating set, corona product of graph.

Cara Menulis Sitasi: Retnowardani, D.A., Dliou K., Wulandari, A. D. R. (2023). Bilangan Dominasi Total pada Graf Hasil Operasi Korona Sisi dari Graf Lintasan dan Sebarang Graf. *Estimator*, 1 (2), 9-15.

DITERIMA: 16 Oktober 2023 DISETUJUI: 15 Desember 2023 ONLINE: 16 Desember 2023

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang banyak penerapannya dalam berbagai bidang ilmu seperti *engineering*, fisika, biologi, kimia, arsitektur, transportasi, teknologi komputer, ekonomi, sosial dan bidang lainnya. Teori graf juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan - persoalan, seperti *Travelling Salesman Problem*, *Chinese Postman Problem*, *Shortest Path*, *Electrical Network Problems*, *Graph Coloring*, dan lain-lain

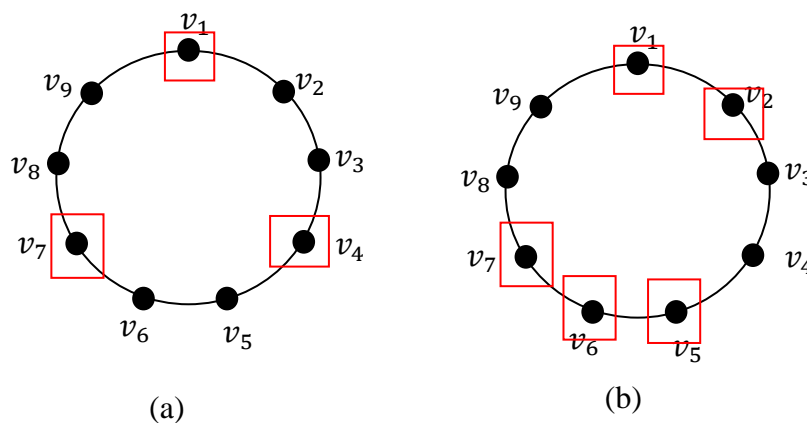
Pengembangan dari studi sebelumnya, kardinalitas minimal dari himpunan dominasi disebut dengan bilangan dominasi $\gamma(G)$. Nilai dari bilangan dominasi selalu $\gamma(G) \subseteq V(G)$. Mengenai batas atas dari bilangan dominasi adalah banyaknya titik pada graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma(G) \leq n$ untuk setiap graf yang berordo n . Diketahui graf $G = (V, E)$. Misalkan D merupakan subset dari $V(G)$. Himpunan dominasi dari graf G didefinisikan sebagai D jika setiap titik dari $V - D$ saling bertetangga sedikitnya dengan satu titik dari D [4].

Untuk suatu graf terhubung G , himpunan S^t dari titik-titik di G adalah himpunan dominasi total dari G jika setiap titik di G terhubung langsung ke suatu titik di S^t , dan setiap anggota himpunan dominasi total harus terhubung langsung dengan titik lain di S^t . Bilangan minimal dari himpunan dominasi total dikenal sebagai $\gamma_t(G)$ [5,6].

Berikut merupakan contoh gambar himpunan dominasi dan himpunan dominasi total.

Gambar 1.1 (a) Himpunan dominasi pada graf siklus C_9 **(b)**

Himpunan dominasi total pada graf siklus C_9

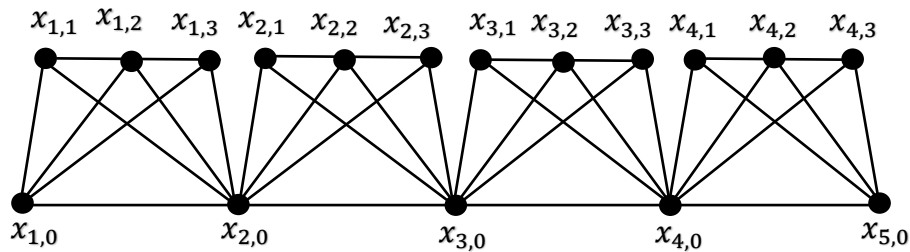


Pada Gambar 1.1 (a) terlihat himpunan dominasi yaitu v_1, v_4 , dan v_7 dimana v_1 mendominasi v_2 dan v_9 , v_4 mendominasi v_3 dan v_5 , dan v_7 mendominasi v_6 dan v_8 . Pada Gambar 1.1 (b) terlihat himpunan dominasi total yaitu v_1, v_2, v_5, v_6 , dan v_7 dimana v_1 mendominasi v_2 dan v_9 , v_2 mendominasi v_1 dan v_3 , v_5 mendominasi v_4 dan v_6 , v_6 mendominasi v_5 dan v_7 , v_7 mendominasi v_8 . Dari kedua gambar di atas terlihat bahwa himpunan dominasi total lebih banyak anggotanya dari pada himpunan dominasi.

Operasi korona sisi dari dua graf yang dinotasikan dengan $G \diamond H$ dari graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu buah duplikat dari graf G dan duplikat H sebanyak sisi pada graf G , dan kemudian menghubungkan dua titik ujung dari sisi ke- i pada G dengan setiap titik duplikat ke- i pada H [3].

Berikut merupakan contoh gambar operasi korona sisi dari graf lintasan dan graf lintasan.

Gambar 1.2 Graf $P_5 \diamond P_3$



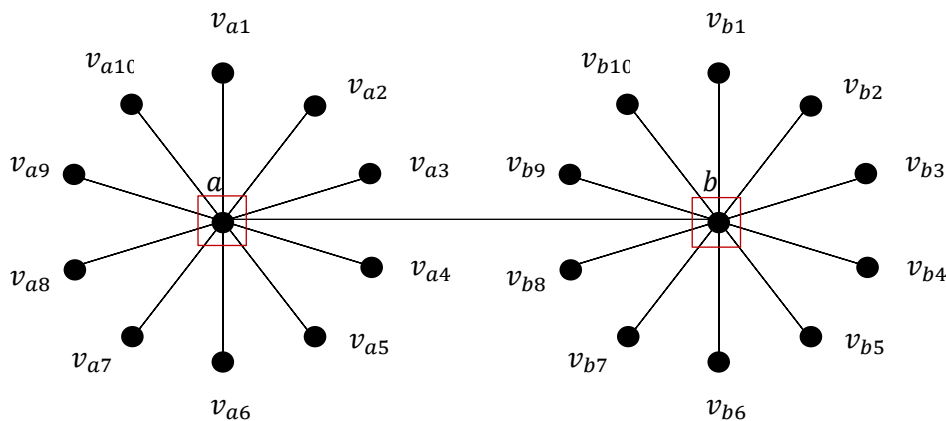
2. TEOREMA YANG DIGUNAKAN

Berikut beberapa teorema yang digunakan pada penelitian ini:

Lema 2.1 [1] misalkan G adalah sebarang graf terhubung, maka $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$

Hubungan antara himpunan dominasi dan himpunan dominasi total adalah $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$. Karena himpunan dominasi total harus saling mendominasi antar anggota himpunan dominasi maka paling sedikit nilai dari bilangan dominasi total adalah bilangan dominasi. Contoh graf yang memenuhi $\gamma_t(G) = \gamma(G)$ salah satunya adalah graf bintang ganda atau *double star*, berikut contoh gambar himpunan dominasi total pada graf bintang ganda.

Gambar 2.1 Himpunan Dominasi Total pada Graf DS_{10}



Hal yang sama berlaku juga $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$. Salah satu contoh graf yang memenuhi batas tersebut adalah graf lengkap, $\gamma(K_n) = 1$ dan $\gamma_t(K_n) = 2$.

Berikut beberapa batas atas dari bilangan dominasi total menurut [1] :

Lema 2.2 Misal G merupakan graf terhubung, maka $\gamma_t(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta(G)} \right\rfloor$;

Lema 2.3 Misal G merupakan graf dengan $diam(G) = 2$, maka $\gamma_t(G) \leq \delta(G) + 1$;

Teorema 2.1 Misalkan G adalah graf lintasan dan graf lingkaran, maka

$$\gamma_t(C_n) = \gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{untuk } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berikut adalah hasil penelitian mengenai himpunan dominasi pada graf hasil operasi korona sisi menurut [2]:

Teorema 2.2 Jika P_n adalah graf lintasan dan H adalah sebarang graf, maka $\gamma(P_n \diamond H) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, untuk $n > 1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut hasil-hasil penelitian pada artikel ini:

Lema 3.1 Misalkan $G \diamond H$ adalah graf hasil operasi korona sisi dari graf G dan H , dan D adalah himpunan total dominasi pada graf $G \diamond H$, maka $D \subset V(G)$.

Bukti. Ambil sembarang $x_i \in D$, maka jarak titik tersebut terhadap titik-titik di graf H_i pasti sebanyak satu. Andaikan $x_i \in V(H_i)$ dengan $i \equiv 1 \pmod{3}$ maka terdapat titik pada $V(H_{i+1})$ yang tidak terdominasi oleh titik x_i , selain itu terdapat titik dominasi pada $V(H_{i+1})$ yang tidak terdominasi oleh titik lainnya pada D . Sehingga terbukti bahwa $D \subset V(G)$.

Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan $V(P_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf lintasan adalah $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n-1$. Diameter pada graf lintasan adalah $diam(P_n) = n-1$ dan derajat terbesar pada graf lintasan adalah $\Delta(P_n) = 2$.

Lema 3.2 Misalkan $P_n \diamond H$ adalah graf hasil operasi korona sisi dari graf lintasan P_n dan graf sembarang H , maka $\gamma_t(P_n \diamond H) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

Bukti. Misalkan $V(H) = \{u_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E(H) = \{e_j; 1 \leq j \leq l; l = |E(H)|\}$. Salinan ke- i dari graf H dengan $1 \leq i \leq n$ disebut H_i dengan $V(H_i) = \{u_{j,k}; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq l; u_j \in V(H)\}$ dan $E(H_i) = \{e_{j,k}; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq l; e_j \in E(H)\}$. Graf $P_n \diamond H$ memiliki himpunan titik $V(P_n \diamond H) = \{v_{0,i}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{j,k}; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq l\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \diamond H) = \{v_{0,i} v_{0,j}; v_i v_j \in E(P_n)\} \cup \{u_{i,j} u_{i,k}; u_j u_k \in E(H)\} \cup \{v_{0,i} u_{i,j}; v_i \in V(P_n), u_j \in V(H)\} \cup \{v_{0,i} u_{i,j}; v_i \in V(P_n), v_{i'} \in V(P_n), v_i v_{i'} \in E(P_n), u_j \in V(H)\}$ sehingga

$|V(P_n \diamond H)| = (n - 1)|V(H_i)|$. Berdasarkan **Lema 2.1** $\gamma(P_n \diamond H) \leq \gamma_t(P_n \diamond H)$, berdasarkan **Teorema 2.2** $\gamma(P_n \diamond H) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maka $\gamma_t(P_n \diamond H) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Misalkan dipilih D berdasarkan hasil pada **Teorema 2.2** maka terdapat titik pada D yang tidak didominasi oleh anggota D yang lainnya, sehingga dipilih $D = \{x_i; i \equiv 2, 0 \pmod{3}\}$. Oleh karena itu $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Selain itu, $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq 2\gamma(P_n \diamond H)$ maka $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ atau $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq \lfloor \frac{2n}{2} \rfloor$, berdasarkan hasil tersebut $|D|$ yang didapat tidak minimal, sehingga $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Karena $\gamma_t(P_n \diamond H) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ dan $\gamma_t(P_n \diamond H) \geq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, maka terbukti bahwa $\gamma_t(P_n \diamond H) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Misalkan C_n adalah graf siklus dengan $V(C_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_n v_1\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf siklus adalah $|V(C_n)| = n$ dan $|E(C_n)| = n$. Diameter pada graf siklus adalah

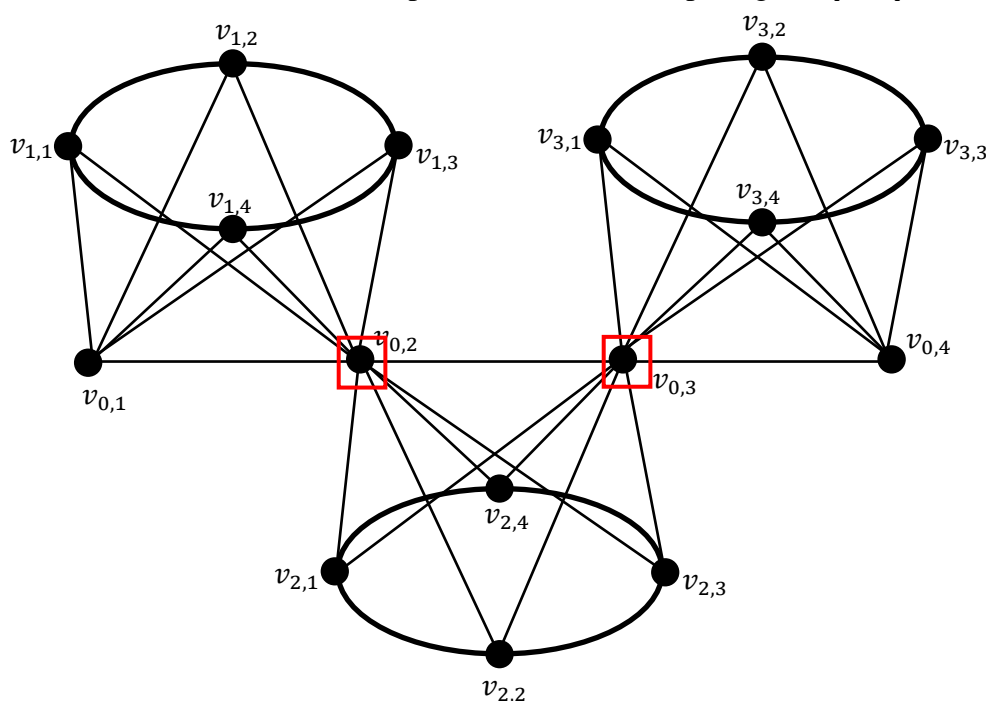
$$\text{diam}(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

dan graf siklus adalah graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama yaitu $\Delta(C_n) = 2$.

Teorema 3.1 Misalkan $P_n \diamond C_m$ adalah graf hasil operasi korona sisi dari graf lintasan P_n dan graf lingkaran C_m , maka $\gamma_t(P_n \diamond C_m) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Bukti. Berdasarkan **Lema 3.1** terbukti bahwa $\gamma_t(P_n \diamond C_m) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Sebagai contoh diberikan gambar himpunan dominasi total pada graf $P_4 \diamond C_4$.

Gambar 3.11 Himpunan dominasi total pada graf $P_4 \diamond C_4$



4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh, maka dapat disimpulkan bahwa :

- Misalkan $G \diamond H$ adalah graf hasil operasi korona sisi dari graf G dan H , dan D adalah himpunan total dominasi pada graf $G \diamond H$, maka $D \subset V(G)$.
- Misalkan $P_n \diamond H$ adalah graf hasil operasi korona sisi dari graf lintasan P_n dan graf sembarang H , maka $\gamma_t(P_n \diamond H) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

Berdasarkan hasil-hasil yang diperoleh, maka penulis memberikan saran pada peneliti berikutnya untuk melakukan penelitian himpunan dominasi total pada graf operasi korona sisi $G \diamond H$ dengan graf G tertentu dan graf H sembarang atau melakukan penelitian himpunan dominasi total pada operasi graf lainnya yang belum diteliti.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas PGRI Argopuro Jember khususnya kepada Fakultas Sains dan Teknologi program studi Statistik.

REFERENSI

- [1] E.J. Cockayne, R.M. Dawes, and S.T. Hedetniemi, "Total dominations in graphs", *Networks*, 10 (1980), 211–219.
- [2] Y. Wahyuni, M. I. Utoyo, dan Slamini. "Bilangan Dominasi Graf Hasil Operasi Korona Sisi". *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*. Vol. 16, No. 2, Desember 2019, 135-146.
- [3] Y. Hou and W. C. Shiu, "The Spectrum of The Edge Corona of Two Graphs," *Electron. J. Linear Algebr.*, vol. 20, pp. 586–594, 2010.
- [4] T.W. Haynes and S.T. Hedetniemi, "Fundamentals domination in graphs", Marcel Dekker, New York, 1998.
- [5] M.A. Henning and A. Yeo , "A new upper bound on the total domination number of a graph", *Electronic J. of Combinatorics*, 14 (2007), #R65.
- [6] P.C.B. Lam and B. Wei , "On the total domination number of graphs", *Utilitas Math.*, 72 (2007), 223–240.