

RAINBOW ANTIMAGIC COLORING PADA GRAF HASIL OPERASI JOIN PADA GRAF BROOM

Dwi Agustin Retnowardani^{1*}, Brian Juned Septory², Kamal Dliou³, Audia Dwi Retno Wulandari⁴

^{1,4}Universitas PGRI Argopuro Jember, 2i.agustin@gmail.com, audidrw@gmail.com

²Universitas Airlangga, brianseptory95@gmail.com

³Universitas Ibn Zohr, dlioukamal@gmail.com

*Penulis Koresponden

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Fungsi bijektif f dari $V(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ adalah pelabelan titik graf G . Fungsi bijektif f disebut *rainbow antimagic labeling* jika untuk setiap dua sisi xy dan $x'y'$ dalam lintasan $u - v$, berlaku $w(xy) \neq w(x'y')$, dengan $w(xy) = f(x) + f(y)$ dan $u, v \in V(G)$. *Rainbow antimagic coloring* adalah pewarnaan graf G dengan *rainbow antimagic labeling*. Jadi, setiap *rainbow antimagic labeling* merupakan pewarnaan pelangi graf G dengan bobot sisi $w(xy)$ adalah warna sisi xy . *Rainbow antimagic connection number* pada graf G adalah jumlah warna terkecil dari semua *rainbow antimagic coloring* graf G , dinotasikan dengan $rac(G)$. Pada penelitian ini, dipelajari *rainbow antimagic coloring* dan mendapatkan nilai *rainbow antimagic connection number* graf hasil operasi join $Br_{n,3} + K_1$.

Kata kunci: antimagic labeling, graf hasil operasi join, pewarnaan pelangi, rainbow antimagic connection number.

Abstract. Let G be a connected graph with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. The bijective function f from $V(G)$ to the set $\{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ is a vertex labeling of graph G . The bijective function f is called *rainbow antimagic labeling* if for every two edges xy and $x'y'$ in a $u - v$ path, $w(xy) \neq w(x'y')$, where $w(xy) = f(x) + f(y)$ and $u, v \in V(G)$. *Rainbow antimagic coloring* is coloring graph G with *rainbow antimagic labeling*. So, every *rainbow antimagic labeling* is a *rainbow coloring* of graph G with side weight $w(xy)$ being the color of the xy edge. The *rainbow antimagic connection number* in graph G is the smallest number of colors of all the *rainbow antimagic coloring* graph G , denoted by $rac(G)$. In this research, we studied *rainbow antimagic coloring* and obtained the value of the *rainbow antimagic connection number* graph resulting from the join operation $Br_{n,3} + K_1$.

Keywords: antimagic labeling, join graph, rainbow antimagic connection number, rainbow coloring.

Cara Menulis Sitasi: Retnowardani, D.A., Septory, B.J., Dliou, K., Wulandari, A.D.R (2023). *Rainbow antimagic coloring* pada graf hasil operasi join pada graf broom. *Estimator*, I (1), 19-27.

DITERIMA: 01 Juni 2023

DISETUJUI: 16 Juni 2023

ONLINE: 30 Juni 2023

1. PENDAHULUAN

Dalam artikel ini, kami menggunakan graf sederhana dan terhubung. Definisi graf yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada Chartrand *et al.* [7]. Graf hasil operasi join dari dari graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 + G_2$ adalah graf dengan $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$ [13]. Rainbow antimagic coloring merupakan konsep baru dengan menggabungkan konsep pewarnaan pelangi dan *edge antimagic labeling*. Pewarnaan pelangi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand *et al.* [8]. Misalkan G adalah graf terhubung, pewarnaan sisi G dengan fungsi $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ adalah k -pewarnaan graf G dengan dua sisi yang bertetangga dapat diwarnai dengan warna yang sama. Lintasan pelangi $u - v$ adalah lintasan pada graf G jika tidak ada dua sisi yang memiliki warna sama. Pewarnaan graf G adalah koneksi pelangi jika setiap $u, v \in V(G)$ memiliki lintasan pelangi. Pewarnaan sisi G yang memiliki koneksi pelangi disebut pewarnaan pelangi. Warna terkecil untuk membuat G memenuhi koneksi pelangi disebut *rainbow connection number* dari G dan dinotasikan dengan $rc(G)$. Penelitian tentang *rainbow connection number* diperoleh hasil, antara lain [18] dan [19].

Kajian pewarnaan pelangi memiliki varian antara lain pewarnaan pelangi titik dan pewarnaan pelangi total. Pewarnaan pelangi titik pertama kali diperkenalkan pada [17]. Hasil pewarnaan pelangi titik terdapat pada [20] dan [22]. Varian lain dari pewarnaan pelangi adalah pewarnaan pelangi total dan hasilnya dapat dilihat pada [15] dan [23]. Pelabelan graf diperkenalkan pada [24] oleh Wallis *et al.* (2001). Hartsfield dan Ringel memperkenalkan *antimagic labeling* untuk pertama kalinya pada [14]. *Antimagic labeling* memiliki beberapa hasil termasuk oleh Baca *et al.* di [2,3,4,5]. Kemudian Dafik *et al.* telah berkontribusi pada antimagic labeling di [11]. Selain itu, hasil *antimagic labeling* juga dapat ditemukan di [9] dan [10].

Arumugam *et al.* [1] mempelajari studi tentang penggabungan pewarnaan graf dan pelabelan graf. Fungsi bijektif dari himpunan sisi $E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ dan $w(v) = \sum_{xy \in E(v)} f(xy)$, $E(v)$ adalah himpunan sisi yang terkait dengan titik v , untuk setiap $v \in V(G)$. Fungsi bijektif f disebut antimagic labeling jika untuk dua titik yang bertetangga $u, v \in V(G)$, $w(u) \neq w(v)$. Pewarnaan titik G dengan titik v diwarnai dengan $w(v)$ adalah *local antimagic labeling*. Jika kita menemukan *chromatic number* dari *local antimagic labeling*, maka konsep disebut *local antimagic coloring*. Termotivasi kombinasi yang dilakukan oleh Arumugam, Dafik *et al.* dalam [12] mendefinisikan kombinasi konsep pewarnaan pelangi dan antimagic labeling adalah konsep baru yang disebut *rainbow antimagic coloring*. Dafik *et al.* telah menemukan teorema tentang keberadaan lintasan pelangi $x - y$ dari setiap graf dengan $diam(G) \leq 2$.

Teorema 1. [12] Misalkan G adalah graf terhubung, $diam(G) \leq 2$. Misalkan fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$. Untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi $u - v$.

Septory *et al.* telah menemukan batas bawah dari *rainbow antimagic connection number* untuk setiap graf terhubung G .

Teorema 2. [21] Misalkan G adalah graf terhubung. $rc(G)$ adalah *rainbow connection* dari graf G dan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar dari graf G . $rac(G) \geq \max\{rc(G), \Delta(G)\}$.

Hasil rainbow antimagic coloring telah dipelajari pada [6], [12], [16] dan [21]. Dalam penelitian ini, kami mempelajari *rainbow antimagic coloring* dan menemukan nilai *rainbow antimagic connection number* dari graf hasil operasi join $Br_{n,3} + K_1$.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, kami akan menunjukkan nilai *rainbow antimagic connection number* pada graf hasil operasi join $Br_{n,3} + K_1$ dan $2Br_{n,3} + K_1$.

Teorema 3. Untuk $n \geq 2$, $rac(Br_{n,3} + K_1) = n + 4$.

Bukti. Misalkan $Br_{n,3} + K_1$ adalah graf dengan himpunan titik $V(Br_{n,3} + K_1) = \{v, x, x_1, x_2, x_3\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Br_{n,3} + K_1) = \{vy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{vx, vx_1, vx_2, vx_3, xy_1\} \cup \{y_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas $V(Br_{n,3} + K_1)$ adalah $|V(Br_{n,3} + K_1)| = n + 5$ dan kardinalitas $E(Br_{n,3} + K_1)$ adalah $|E(Br_{n,3} + K_1)| = 2n + 4$. Berdasarkan definisi graf $Br_{n,3} + K_1$, diperoleh $\Delta(Br_{n,3} + K_1) = n + 4$. Untuk mendapatkan *rainbow antimagic connection number* dari $Br_{n,3} + K_1$, pertama-tama kita perlu menunjukkan batas bawah dari $rac(Br_{n,3} + K_1)$. Berdasarkan **Teorema 1** dan **Teorema 2**, diperoleh $rac(Br_{n,3} + K_1) \geq \Delta(Br_{n,3} + K_1)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $rac(Br_{n,3} + K_1) \geq n + 4$.

Kedua, menunjukkan batas atas dari $rac(Br_{n,3} + K_1)$. Misalkan $f : V(Br_{n,3} + K_1) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 5\}$ adalah pelabelan titik dari graf $Br_{n,3} + K_1$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v) = 2$$

$$f(x) = 1$$

$$f(x_1) = n + 3$$

$$f(x_2) = n + 4$$

$$f(x_3) = n + 5$$

$$f(y_i) = \begin{cases} \frac{i}{2} + 2 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ n + 3 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor & , 1 \leq i \leq n, i \text{ gasal} \end{cases}$$

Untuk bobot sisi, diperoleh :

$$w(vx) = 3$$

$$w(xy_1) = n + 3$$

$$w(vx_1) = n + 5$$

$$w(vx_2) = n + 6$$

$$w(vx_3) = n + 7$$

$$w(vy_i) = \begin{cases} \frac{i}{2} + 4 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ n + 5 - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

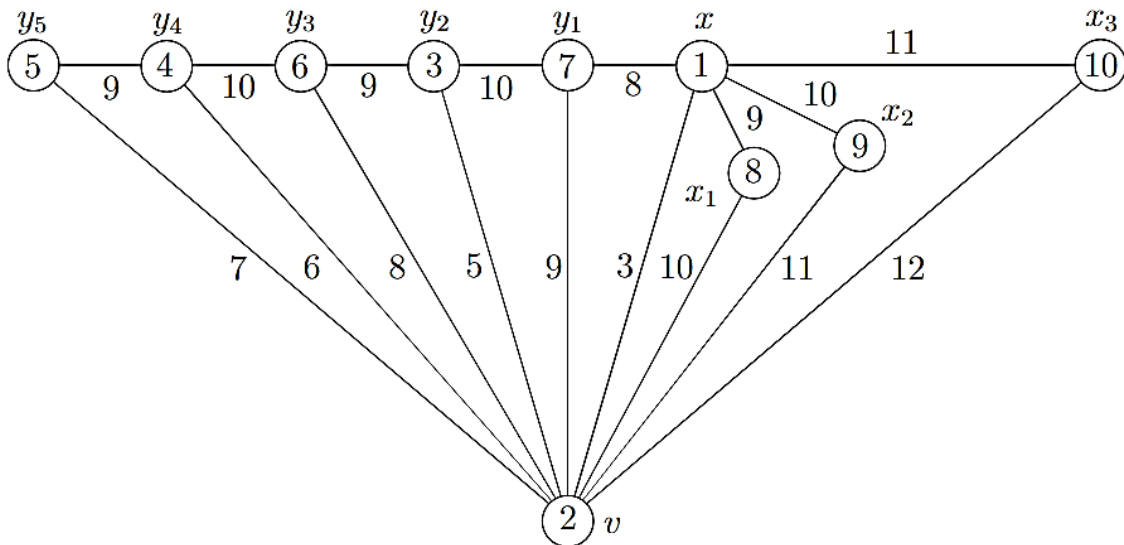
$$w(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} n + 5 & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ n + 4 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot sisi dari fungsi $f : V(Br_{n,3} + K_1) \rightarrow \{1,2,3,\dots,n+5\}$ diperoleh bobot sisi menginduksi *rainbow antimagic coloring* sebanyak $n+4$ warna. Jadi, $rac(Br_{n,3} + K_1) \leq n+4$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh $rac(Br_{n,3} + K_1) = n+4$.

Selanjutnya menunjukkan keberadaan lintasan pelangi $x-y$ pada graf $Br_{n,3} + K_1$. Karena $diam(Br_{n,3} + K_1) = 2$, berdasarkan **Teorema 1**, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap dua titik $x, y \in V(Br_{n,3} + K_1)$, terdapat lintasan pelangi $x-y$. ■

Ilustrasi *rainbow antimagic coloring* graf $Br_{n,3} + K_1$ dapat dilihat pada Gambar 1.

Gambar 1. *Rainbow antimagic coloring* pada graf $Br_{n,3} + K_1$.



Teorema 4. Untuk $n \geq 2$, $rac(2Br_{n,3} + K_1) = 2n + 8$.

Bukti. Misalkan $2Br_{n,3} + K_1$ adalah graf dengan himpunan titik $V(2Br_{n,3} + K_1) = \{v, x_1, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_2, x_{21}, x_{22}, x_{23}\} \cup \{y_i, z_i, 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(2Br_{n,3} + K_1) = \{vy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_{11}, x_1 x_{12}, x_1 x_{13}, x_2 x_{21}, x_2 x_{22}, x_2 x_{23}\} \cup \{vx_1, vx_{11}, vx_{12}, vx_{13}, vx_2, vx_{21}, vx_{22}, vx_{23}, x_1 y_1, x_2 z_1\}$. Kardinalitas $V(2Br_{n,3} + K_1)$ adalah $|V(2Br_{n,3} + K_1)| = 2n + 9$ dan kardinalitas $E(2Br_{n,3} + K_1)$ adalah $|E(2Br_{n,3} + K_1)| = 4n + 14$. Berdasarkan definisi graf $2Br_{n,3} + K_1$, diperoleh $\Delta(2Br_{n,3} + K_1) = 2n + 8$. Untuk mendapatkan *rainbow antimagic connection number* dari $2Br_{n,3} + K_1$, pertama-tama kita perlu menunjukkan batas bawah dari $rac(2Br_{n,3} + K_1)$. Berdasarkan **Teorema 1** dan **Teorema 2**, diperoleh $rac(2Br_{n,3} + K_1) \geq \Delta(2Br_{n,3} + K_1)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $rac(2Br_{n,3} + K_1) \geq 2n + 8$.

Kedua, menunjukkan batas atas dari $rac(2Br_{n,3} + K_1)$. Misalkan $f : V(2Br_{n,3} + K_1) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 9\}$ adalah pelabelan titik dari graf $2Br_{n,3} + K_1$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f(v) = 3$$

$$f(x_1) = 1$$

$$f(x_2) = 2$$

$$f(x_{11}) = 2n + 4$$

$$f(x_{12}) = 2n + 5$$

$$f(x_{13}) = 2n + 6$$

$$f(x_{21}) = 2n + 7$$

$$f(x_{22}) = 2n + 8$$

$$f(x_{23}) = 2n + 9$$

$$f(y_i) = \begin{cases} i + 2 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2n + 3 - i & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} i + 3 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2n + 4 - i & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk bobot sisi, diperoleh :

$$w(vx_1) = 4$$

$$w(vx_2) = 5$$

$$w(vx_{11}) = 2n + 7$$

$$w(vx_{12}) = 2n + 8$$

$$w(vx_{13}) = 2n + 9$$

$$w(vx_{21}) = 2n + 10$$

$$w(vx_{22}) = 2n + 11$$

$$w(vx_{23}) = 2n + 12$$

$$w(x_1y_1) = 2n + 3$$

$$w(x_2z_1) = 2n + 5$$

$$w(x_1x_{11}) = 2n + 5$$

$$w(x_1x_{12}) = 2n + 6$$

$$w(x_1x_{13}) = 2n + 7$$

$$w(x_2x_{21}) = 2n + 9$$

$$w(x_2x_{22}) = 2n + 10$$

$$w(x_2x_{23}) = 2n + 11$$

$$w(vy_i) = \begin{cases} i + 5 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2n + 6 - i & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$w(vz_i) = \begin{cases} i + 6 & , 2 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2n + 7 - i & , 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$w(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 6 & , 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil} \\ 2n + 4 & , 2 \leq i \leq n - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

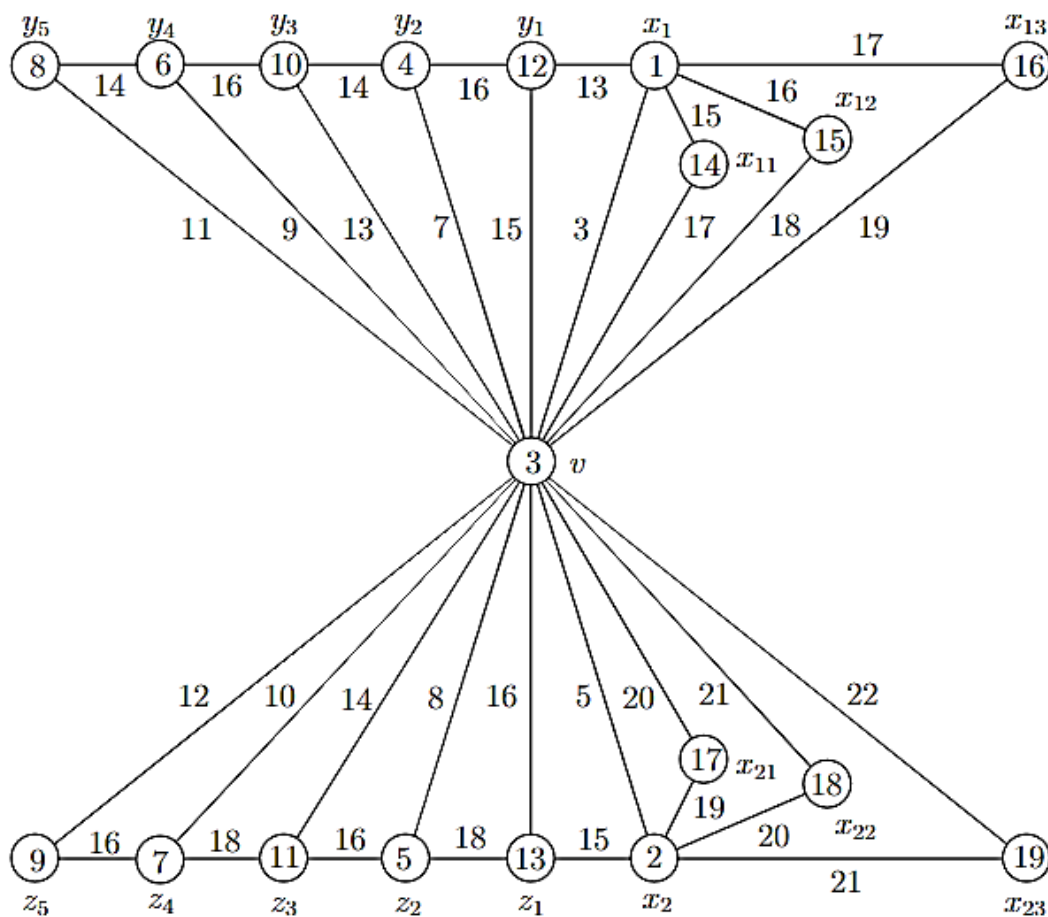
$$w(z_iz_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 8 & , 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil} \\ 2n + 6 & , 2 \leq i \leq n - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan bobot sisi dari fungsi $f : V(2Br_{n,3} + K_1) \rightarrow \{1,2,3,\dots,2n+9\}$ diperoleh bobot sisi menginduksi *rainbow antimagic coloring* sebanyak $2n+8$ warna. Jadi, $rac(2Br_{n,3} + K_1) \leq 2n+8$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh $rac(2Br_{n,3} + K_1) = 2n+8$.

Selanjutnya menunjukkan keberadaan lintasan pelangi $x-y$ pada graf $2Br_{n,3} + K_1$. Karena $diam(2Br_{n,3} + K_1) = 2$, berdasarkan **Teorema 1**, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap dua titik $x, y \in V(2Br_{n,3} + K_1)$, terdapat lintasan pelangi $x-y$. ■

Ilustrasi *rainbow antimagic coloring* $2Br_{n,3} + K_1$ dapat dilihat pada Gambar 2.

Gambar 2. *Rainbow antimagic coloring* pada graf $2Br_{n,3} + K_1$.



3. KESIMPULAN

Paper ini mempelajari dan memperoleh hasil *rainbow antimagic coloring* pada graf hasil operasi join $Br_{n,3} + K_1$ dan $2Br_{n,3} + K_1$. Berdasarkan **Teorema 3** dan **Teorema 4** dapat diambil kesimpulan bahwa *rainbow antimagic connection number* pada graf hasil operasi join $Br_{n,3} + K_1$ dan $2Br_{n,3} + K_1$ bergantung pada derajat terbesar dari graf $Br_{n,3} + K_1$ dan $2Br_{n,3} + K_1$. Namun, jika bukan graf K_1 yang digunakan dalam operasi join, masih sulit untuk menentukan *nilai rainbow antimagic connection number*. Oleh karena itu, penelitian ini memunculkan masalah terbuka, yaitu menentukan *rainbow antimagic connection number* pada graf hasil operasi join $G + H$ dengan graf H bukan merupakan graf K_1 .

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terimakasih pada tim editor jurnal ESTIMATOR Universitas PGRI Argopuro Jember.

REFERENSI

- [1] Arumugam S, Premalatha K, Bařca M, Semaniřcov'a-Feřnovř'ıkov'a A, Local antimagic vertex coloring of a graph, *Graphs Combin.* **33** (2017), 275-285.
- [2] Bařca M, Antimagic labelings of antiprisms, *Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing.* **35** (2000), 217-224.
- [3] Bařca M, Baskoro E T, Jendrol S, Miler M, Antimagic labelings of hexagonal plane maps, *Utilitas mathematica.* **66** (2004), 231-238.
- [4] Bařca M, Lin Y, Miler M, Antimagic labelings of grids, *Utilitas mathematica.* **72** (2007), 65-75.
- [5] Bařca M, Dafik, Ryan J, Antimagic labelings of disjoint union of s-crowns, *Utilitas mathematica.* **79** (2009), 193-205.
- [6] Budi H S, Dafik, Tirta I M, Agustin I H, Kristiana A I, On rainbow antimagic coloring of graphs, *Journal of Physics: Conf. Series* **1832** (2021), 012016.
- [7] Chartrand G, Lesniak L, Zhang P, *Graphs & Digraphs*, sixth ed., *Taylor & Francis Group*, New York, 2016.
- [8] Chartrand G, Johns G L, Mckeon K A, Zhang P, Rainbow connection in graphs, *Math. Bohemica* **133** (2008), 85-98.
- [9] Chang F, Liang Y C, Pan Z, Zhu X, Antimagic labeling of regular graphs, *Journal of Graph Theory* **82** (4) (2016) 339-349.
- [10] Cranston D W, Regular bipartite graphs are antimagic, *Journal of Graph Theory* **60** (3) (2009) 173-182.

- [11] Dafik, Miler M, Ryan J, Bařca M, Antimagic labeling of the union of two stars, *Australasian Journal of combinatorics* **42** (2018), 35-44.
- [12] Dafik, Susanto F, Alfarisi R, Septory B J, Agustin I H, Venkatachalam M, On rainbow antimagic coloring of graphs. *Advanced Mathematical Models and Application*. **6** (3) (2021) 278-291.
- [13] F. Harary, Graphs Theory, *Wesley*. New London, 1969.
- [14] Hartsfield N, Ringel G, Pearls in Graph Theory, *Academic Press*, San Diego, 1990.
- [15] Hasan M S, Slamini, Dafik, Agustin I H, Alfarisi R, On the total rainbow connection of the wheel related graphs, *Journal of Physics: Conf. Series* **1008** (2018), 012054.
- [16] Joedo J C, Dafik, Kristiana A I, Agustin I H, Nisviasari R, On the rainbow antimagic coloring of vertex almagamation of graphs, *Journal of Physics: Conf. Series* **2157** (2022), 012014.
- [17] Krivelevich M, Yuster R, The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree, *J. Graph Theory* **63** (3) (2010), 185-191.
- [18] Li H, Li X, Liu S, Rainbow connection of graphs with diameter 2, *Discrete Mathematics* **312** (8) (2012), 1453-1457.
- [19] Li H, Li X, Sun Y, Rainbow connection of graphs with diameter 3, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **37** (2) (2017), 141-154.
- [20] Li X, Shi Y, On the rainbow vertex connection, *Graph Theory* **33** (2013), 307-313.
- [21] Septory B J, Utoyo M I, Dafik, Sulistiyono B, Agustin I H, On rainbow antimagic coloring of special graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. **1836** (2021) 012016.
- [22] Simamora D N S, Salman A N M, The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs, *Procedia Computer Science* **74** (2010), 138-142.
- [23] Sun Y, On rainbow total coloring of a graph, *Discrete Applied Mathematics* **194** (2015), 171-177.
- [24] Waliis W D, Magic graphs, *Boston*. Birkhauser. 2001.